Lycée Laymoun — 2ème BAC Pro

Les nombres complexes
1er partie

① Representation des nombres complexes :

Déf : 1) on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nbres complexes

2) Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tq : $\boxed{i^2 = -1}$

③ Tout élét : z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $\boxed{z = a + ib}$
avec : a ; b sont réels.

4) on note :
$\begin{cases} a = Re(z) & \text{la partie réelle de } z \\ b = Im(z) & \text{la partie imaginaire de } z \end{cases}$

- si $a = 0$; z est appelé imag pur.
- si $b = 0$; z est un nbre réel.
- $a + ib$ est **l'écriture algébrique** de z.

Exple : $Re\left(3 - \frac{2}{5}i\right) =$
$Im\left(3 - \frac{2}{5}i\right) =$

② Règles de calcul :

soient $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$ deux nbrs complx

- Egalité : $z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- Somme $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- produit $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$
- Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$
- quotient : $\frac{z}{z'} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2}$

Ex : 1 Ecrire sous la forme $x + iy$:

1°/ $\frac{1+i}{i}$ 4°/ $\frac{i}{i+1}$ 7°/ $\frac{3}{i+1} - \frac{1}{2i}$

2°/ $\frac{i-4}{2i}$ 5°/ $\frac{3+4i}{i-1}$

3°/ $\frac{2}{4-i}$ 6°/ $\frac{i-3}{i+3}$

③ Conjugué d'1 nbre complexe

Déf : on appelle conjugué de $z = a + ib$; le nombre complexe noté $\overline{z}$ tq : $\boxed{\overline{z} = a - ib}$

Prop : $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$

$z = z' \Longleftrightarrow \overline{z} = \overline{z'}$

$\overline{z + z'} + \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{(\overline{z})} = z$

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

si $z' \neq 0$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

En particulier :

$z + \overline{z} = 2 \times Re(z)$; $z - \overline{z} = i2Im(z)$

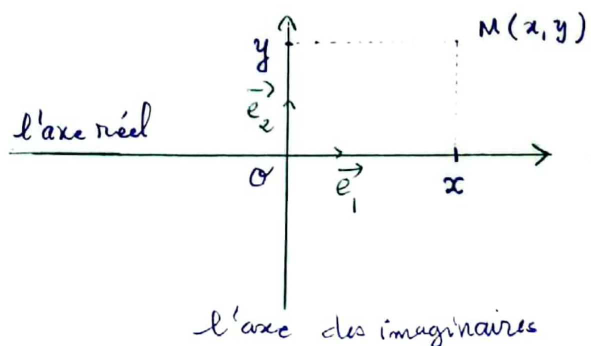
z imagin pur $\Longleftrightarrow$ $\boxed{z + \overline{z}' = 0}$

z réel $\Longleftrightarrow$ $\boxed{z = \overline{z}'}$

④ Le plan Complexe :

On muni le plan d'1 repère orthonormé $(O ; \vec{e_1} ; \vec{e_2})$

$z = x + iy$ est représenté par le pt : $M(x ; y)$. on dit que :
M est **l'image** de z et que : z est **l'affixe** du pt M :



5 Module d'un nombre complexe.

Déf le module de $z = a+ib$ c'est : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Prop : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (avec : $z \neq 0$)

Ex:2| Calculer le module de :

$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+\sqrt{2} -5i$

$z_3 = z_1 \times z_2$

6 Argument d'un nobre complx non nul

Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et M son image. L'argument θ de z est l'un des mesure de l'angle $(\vec{e_1}; \overrightarrow{OM})$.

On le note : arg(z) et on écrit :

$$\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$$

7 La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un complx ≠ 0.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$.

on pose : $r = |z|$ et $Arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

- La forme trigonométrique de z c'est :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = [r ; \theta]$$

- La notation exponentielle de z c'est :

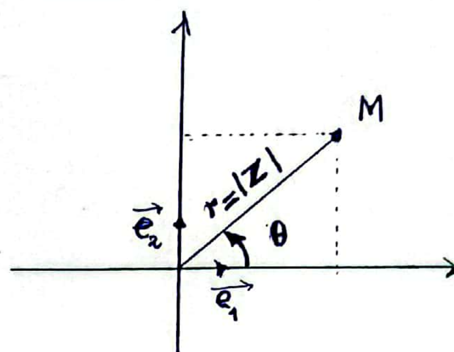
$$z = re^{i\theta}$$

Req : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

Cas particuliers :

si $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a ; 0]$	$a = [-a ; \pi]$
$ai = [a ; \frac{\pi}{2}]$	$ai = [-a ; -\frac{\pi}{2}]$



Ex: 3| ① Calculer l'argument de :

$z_1 = i$; $z_2 = 1$; $z_3 = -1$

$z_4 = i^3$; $z_5 = z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4$

② Donner la forme trigonométrique de :

$z_1 = i$; $z_2 = 3$; $z_3 = (2i)^3$

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3} i$

Req : pour trouver la forme trigonométrique de $z = x+iy$ on calcul r et θ

avec : $r = \sqrt{x^2+y^2}$

θ est determiné dès que l'on calcul $\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

et en utilisant le tableau :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

n° 7

Lycée Laymoune — 2ème Bac Pro

Les nombres complexes - 2ème Partie -

① Affixe d'1 pt et d'1 vecteur :

Dans le plan complexe on considère le pt : $M(x;y)$ $(x;y \in \mathbb{R})$.

. $z = x + iy$ est l'affixe de $M(x+iy)$

z est aussi l'affixe du vecteur : $\overrightarrow{OM}$

et on écrit : $aff(M) = z = x+iy$

et $aff(\overrightarrow{OM}) = z$

En général :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A = aff(B) - aff(A)$$

Exple : un triangle ABC est isocèle en A $\Leftrightarrow |aff(\overrightarrow{AB})| = |aff(\overrightarrow{AC})|$

② Mesure d'un angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

Exple : Soient A, B, C et D tq :

$z_A = i$, $z_B = 2i$; $z_C = 4+i$ et : $z_D = 4+3i$.

mq : $(AB) // (CD)$

* Rapple : $(AB) // (CD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0 [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi [2\pi]$

$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

EX:1 Soient : $A(1+2i)$; $B(-2+i)$ et : $C(-1-2i)$. calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

En déduire la nature de ABC.

EX:2 $A(1+i\sqrt{3})$; $B(-1-i)$; $C(-2-\sqrt{3}+i)$

1) calculer : $aff(\overrightarrow{BA})$; $aff(\overrightarrow{BC})$

2) En déduire la nature de ABC.

③ Les carrés dans $\mathbb{C}$:

Ecrire sous forme d'un carré les nombres complexes :

-1 ; 4 ; -4 ; -8 ;

Applications : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les éq :

$z^2 = -1$; $z^2 = 4$; $z^2 = -4$.

④ Equation de 2nd degré à coefficients réels.

$$(E) : az^2 + bz + c = 0 \quad \begin{pmatrix} a, b, c \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

Le discriminant de (E) :

$\Delta = b^2 - 4ac$; il y a 3 cas :

1- si : $\Delta = 0$ alors : unique solution (réelle) dans $\mathbb{C}$: $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

2- si : $\Delta > 0$ alors : deux solutions (réelles) dans $\mathbb{C}$:

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3- si : $\Delta < 0$ il y a deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$:

$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Exple : $z^2 - 2z + 2 = 0$

mq : $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$ sont les solutions de l'éq.

EX : 3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les éq :

1) $z^2 - 2z + 5 = 0$

2) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

3) $z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$

EX : 4 on considère dans $\mathbb{C}$ l'éq :

(E) $z^2 - 2z + 2 = 0$

1°) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ (les solutions z_1 et z_2 sont tq : $Im(z_1) > 0$, $Im(z_2) < 0$)

2°) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

3°) Mq : $z_1^4 + z_2^4 = -8$

4°) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct ; $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les pts :

$A(1-i)$ et $B(1+i)$.

4-a) Donner $\frac{1+i}{1-i}$ sous forme algébrique.

4-b) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en O. (EXAM BAC)

Ex : 5 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq : (E) : $z^2 + 2z + 4 = 0$

2) On pose : $a = -1 + i\sqrt{3}$

$b = 2$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$

écrire $a-b$ et $c-b$ sous forme trigonométrique.

3) En déduire le module et un argument du nombre $\frac{c-b}{a-b}$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les pts A, B et C d'affixes respectives : a, b et c

Montrer que ABC est équilateral.

(EXAM de BAC)

EX : 6 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq :

$z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2°) On considère les pts A, B et C d'affixes respectives : $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3°) En déduire que le triangle ABC est équilateral.

Ex : 7 $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$

1°) calculer $P(i)$ et $P(-i)$

2°) Trouver a, b et c dans $\mathbb{R}$ tq : pour tout $z \in \mathbb{C}$ on :

$P(z) = (z^2+1)(az^2 + bz + c)$

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'éq :

$P(z) = 0$

(← Suite : Nbr complx.

EX : 4 En utilisant la req précédente ; trouver la forme trigonométq de :

$$Z = 1+i \quad \text{et de :} \quad Z' = \sqrt{3}+i$$

⑧ propriétés de l'argument :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$$
$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \; [2\pi]$$
$$-\arg(z) = \pi + \arg(z) \; [2\pi]$$
$$\arg(z^n) = n \times \arg(z) \; [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \; [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \; [2\pi]$$

$z \neq 0$

$$Z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$
$$Z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

EX : 5 Déterminer une écriture trigo des nbrs :

$(1+i)\times(\sqrt{3}+i)$; $\overline{\sqrt{3}+i}$; $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$

$\dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$; $(\sqrt{3}+i)^5$; $(1+i)^2 \times (\sqrt{3}-i)$

$\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$; $\left(\dfrac{i}{1-i}\right)^{2006}$; i^{100}

⑨ propts de la notation exponentielle.

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (r \times r')e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \; ; \; -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$$
$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \; ; \; \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$$

Formule de MOIVRE :

$$\forall n \in \mathbb{N} ; \; (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

EX : 6 Donner la forme exp de nbrs :

$z_1 = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

$z_3 = 3i$; $z_4 = 8 + i8$

$z_5 = 7 - 7\sqrt{3}i$; $z_6 = \sqrt{\frac{3}{2}}(i-1)$

$z_7 = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$; $z_8 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i}$

$z_9 = (3+i)^4$; $z_{10} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑩ Formule d'Euler :

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) ; \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

⑪ Notions géométriques :

La notion géométrique	La relation
Distance AB	$AB = \lvert z_B - z_A \rvert$
I centre de [AB]	$z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$
A B et C sont alignés	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
ABC est un triangle rectangle au pt A	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$
ABC est isocèle en A	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1 ; \theta]$
ABC rectangle et isocèle en A.	$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm\dfrac{\pi}{2}\right]$

EX : 12 A ; B deux pt d'affixes

$z_A = -1 + i$ $\quad z_B = -\sqrt{2}i + \sqrt{2}$

① Placer les pts A et B.

② Mq les pts A ; B et O sont alignés. (Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$)

n° : 8 — 2ème Semestre